7. Mathe Nacht

Grundlagen

Vollständige Induktion

1. Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

2. Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung $2n^2 > 4n+1$, für welche gilt sie nicht?

3. Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $m^3 - m$ ist ohne Rest durch 3 teilbar.

4. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, dass dann der Durchschnitt von n Untergruppen von G ebenfalls eine Untergruppe von G ist.

Relationen

5. Was ist eine Äquivalenzrelation, was ist eine Ordnungsrelation? Nenne alle Eigenschaften!

6. Sei $A := \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge. Wie viele unterschiedliche Relationen existieren auf A? Gib eine Relation auf A explizit an, die

i) reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.

ii) weder symmetrisch, noch antisymmetrisch ist.

iii) transitiv und reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.

7. Sei eine Relation $\sim$ gegeben auf $\mathbb{Z}$ wie folgt:

Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y$ gerade ist.

Zeige, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert wird.
Beschreibe die Äquivalenzklasse $[0]$.

8. Seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und

$$R := \{(a, b) \in G \times G \mid \text{ Es existiert ein } g \in G \text{ mit der Eigenschaft } b = g^{-1} \circ a \circ g\}$$

Zeige, dass R eine Äquivalenzrealtion ist. Schreibe $[e]$ explizit hin. (e ist das neutrale Element der Gruppe.)

9. Seien M eine beliebige Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Seien außerdem $x, y \in M$ und es gelte $[x] \neq [y]$. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründe.

$$\text{Es existiert ein } m \in M \text{ so, dass } m \in [x] \cap [y].$$

Komplexe Zahlen

10. Stelle folgende komplexe Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar!

(a) $\dfrac{3-i}{2i+1}$

(b) $(1-i)(3+2i)$

(c) $(-i)^5$

(d) $\overline{(3-i)^2}$

11. Bestimme alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt: $z + \overline{z} = 10$.

7. Mathe Nacht

Abbildungen und Homomorphismen

1. Es seien f und g Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ gegeben wie folgt:

Für alle $a \in \mathbb{Z}$ sei $f(a) := -a^2$ und $g(a) := a - 2$.

(a) Gilt $f \circ g = g \circ f$? Beweise oder widerlege!

(b) Gib die Urbildmenge für die Zahl -1 unter f an! Gib auch die Urbildmenge für die Zahl -1 unter $g \circ f$ an!

(c) Ist g bijektiv? Beweise oder widerlege!

(d) Ist f injektiv? Beweise oder widerlege!

2. Gib jeweils eine Abbildung f an, die

(a) von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$ abbildet und nicht surjektiv ist.

(b) von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ abbildet und für die gilt: $f(n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abbildet und für die gilt: $(1, 1)$ liegt im Bild, aber $(0, 0)$ nicht.

3. Gegeben sei die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit der komponentenweisen Addition. Weiter seien $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Abbildungen gegeben wie folgt:

Für alle $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei

$$f(x, y) = (x, -y)$$
$$g(x, y) = (y, 2x)$$

(a) Prüfe, ob die Elemente $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ im Bild von f oder g liegen!

(b) Bestimme alle Elemente $v \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, für die gilt: $f(v) = g(v)$.

(c) Bestimme $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Bild}(g)$!

(d) Ist g ein Gruppen-Homomorphismus von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Beweise oder widerlege!

4. Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}^2$ und die Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to V$ mit:

$$\alpha(z) := (3z, -z) \text{ für alle } z \in \mathbb{R}$$

(a) Zeige, dass α ein Vektorraumhomomorphismus ist!

(b) Bestimme $\mathrm{Kern}(\alpha)$! Welche Dimension hat $\mathrm{Kern}(\alpha)$?

5. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung, wobei
für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt: $f(x, y, z) = (-2x + y, y^2)$.

(a) Gib das Bild von $(1, -3, 2)$ an!

(b) Gib die vollständige Urbildmenge von $(0, 4)$ an und die von $(0, -1)$!

(c) Ist f surjektiv? Ist f injektiv? Ist f ein Vektorraumhomomorphismus? Beweise oder widerlege!

6. Entscheide, welche der folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen bzw. Vektorraumhomomorphismen, injektiv oder surjektiv sind! Bestimme bei den Vektorraumhomomorphismen jeweils den Kern!

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(z) = (0, -z)$

(b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $g(z) = (z, z^2)$

(c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $h(z) = (z, z + 1)$

(d) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $p\left((z_1, z_2)\right) = z_1$

7. Mathe Nacht

Gruppen

1. Seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und $x, y, z \in G$.
Zeige die folgenden Eigenschaften:

i) $(x^{-1})^{-1} = x$.

ii) $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

iii) Aus $x \circ y = x \circ z$ folgt $y = z$.

iv) Seien U eine Untergruppe von G und $u \in U$, $g \in G \setminus U$. Zeige, dass dann auch $u \circ g \in G \setminus U$ gelten muss.

2. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe oder widerlege deine Behauptung!

i) Es existiert ein $g \in G$ so, dass $g \circ g = g$ ist.

ii) Wenn es Elemente $g, h \in G$ gibt so, dass $g \circ h = h \circ g$ gilt, dann ist G abelsch.

iii) Für alle $g, h \in G$ gelte $(g \circ h)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$. Dann ist G abelsch.

iv) Es existiert eine Gruppe $(F, \cdot)$ so, dass F zwei neutrale Elemente besitzt.

3. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit dem neutralen Element e und der Eigenschaft:
Für alle $g \in G$ gilt $g \circ g = e$.

Zeige, dass G abelsch ist.

4. Eine Permutation auf einer Menge ist eine bijektive Abbildung der Menge in sich selbst. Seien A eine endliche Menge und P die Menge aller Permutationen auf der Menge A. Es bezeichne $*$ die Komposition von Abbildungen.

Zeige, dass $(P, *)$ eine Gruppe ist.

5. Seien $G := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\oplus$ wie folgt definiert:

Für alle $(a, b), (c, d) \in G$ sei $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$ (komponentenweise Addition).

i) Zeige, dass $(G, \oplus)$ eine Gruppe ist.

ii) Sei $U := \{(a, b) \in G \mid a \text{ ist gerade}\}$. Ist $(U, \oplus)$ eine Untergruppe von $(G, \oplus)$?

iii) Ist $G \setminus \{(0, 0)\}$ mit komponentenweiser Multiplikation eine Gruppe?

Vektorräume I (Unterräume)

1. Man untersuche, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_c := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = c \,\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Untersuche, welche der folgenden vier Mengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind und beweise oder widerlege deine Behauptung!

(a) $U_1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \,\}$

(b) $U_2 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \,\}$

(c) $U_3 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \,\}$

(d) $U_4 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \,\}$

3. Gegeben sei der Vektorraum $V := \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über dem Körper $\mathbb{R}$. Zeige, dass $U := \{\, f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \,\}$ ein Untervektorraum von V ist.

4. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume von V. Man zeige: Wenn auch die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V ist, dann gilt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

7. Mathe Nacht

Vektorräume II (Basis und Dimension)

1. **(a)** Zeige, dass die Menge

$$M := \{(1,1,1),(0,-1,2),(-2,0,4)\}$$

eine Basis für $\mathbb{R}^3$ bildet.

(b) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren $(-2x,-1,x),(8,x,-4)$ linear unabhängig sind!

2. Wir betrachten den Vektorraum $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Ist die Menge $\{x^2, x^4 + x^2\}$ linear unabhängig?

(b) Gib eine Basis für den Untervektorraum $U := \{f \in V \mid \mathit{Grad}(f) \leq 6\}$ an! Welche Dimension hat U?

3. Es sei $A := \{(1,1,0,0),(0,-1,0,1),(2,-1,0,3),(5,-2,0,7)\}$.

(a) Zeige, dass $(2,-9,0,11)$ in $\operatorname{span}(A)$ liegt! Gib einen Vektor an, der nicht in $\operatorname{span}(A)$ liegt!

(b) Gib ein Erzeugendensystem für $\operatorname{span}(A)$ an!

(c) Gib eine Basis von $\operatorname{span}(A)$ an und beweise, dass es sich um eine Basis handelt!

(d) Welche Dimension hat $\operatorname{span}(A)$?

(e) Ersetze das Fragezeichen!

$$\operatorname{span}(A) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \ ? \ \}$$

4. Gegeben seien die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\} \text{ und } U_2 := \{(x,0,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

(a) Gib eine Basis B_1 von U_1 und eine Basis B_2 von U_2 an!

(b) Gib eine Basis C von $\mathbb{R}^3$ an, die B_1 enthält!

(c) Gib eine Basis von $U_1 \cap U_2$ an!

(d) Bestimme $U_1 + U_2$!

7. Mathe Nacht

Definitionen und Beweise

1. Abbildungen

(a) Definiere drei der folgenden Begriffe!

Bild, Urbild, injektiv, surjektiv

(b) Gegeben sei die Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x) = x^2$. Gib für X und Y Mengen an so, dass

- f injektiv, aber nicht surjektiv ist
- f surjektiv, aber nicht injektiv ist
- f bijektiv ist
- $f \equiv id_X$

2. Gruppen

(a) Definiere drei der folgenden Begriffe/Begriffspaare!

Halbgruppe & Gruppe, Untergruppe, Gruppen-Homomorphismus,
Kern & Bild

(b) Seien $(G, *)$ und $(H, \bullet)$ Gruppen mit den neutralen Elementen e_G und e_H und $\varphi : (G, *) \to (H, \bullet), \alpha : (H, \bullet) \to (G, *)$ Gruppen-Homomorphismen. Beweise:

i. $\forall g \in G \ \forall a \in \text{Kern}(\varphi) : g^{-1} * a * g \in \ \text{Kern}(\varphi)$

ii. Die Komposition $\alpha \circ \varphi : G \to G$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

iii. Es gilt $\varphi(e_G) = e_H, \ \varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} \ \forall g \in G$

3. Ringe, Körper, Vektorräume

(a) Definiere folgende Begriffe! (Die Begriffe „Halbgruppe“ und abelsche Gruppe dürfen dabei ohne Definition verwendet werden.)

Ring, Körper, Vektorraum, Unterraum, Körperhomomorphismus

(b) Definiere jeden Begriff unter Verwendung des vorherigen:

Linearkombination, Erzeugendensystem, Basis, Dimension

(c) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort!

i. Je n paarweise verschiedene Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

ii. Es gibt zwei verschiedene Vektorräume über dem selben Körper mit der gleichen Basis.

iii. Es gibt keine Basis, die die Null des Vektorraumes enthält.

iv. Der Nullraum hat keine Basis und ist der einzige Vektorraum ohne Basis.

v. Jeder Vektorraum hat unendlich viele verschiedene Basen.

vi. Jeder Körper ist ein Ring.

vii. Jeder Ring ist ein Körper.

viii. Alle Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.

(d) Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über dem Körper K. Weiter seien U und W Unterräume von V und es sei $A := \{a_1, ..., a_n\} \subset V$. Zeige:

i. Falls $A \setminus \{a_n\}$ linear abhängig ist, so auch A. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

ii. Falls A linear unabhängig ist, so auch $A \setminus \{a_n\}$. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

(e) Wir betrachten die Vektorräume $\mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$ der reellen bzw. rationalen Polynome.

i. Finde für eine beliebige Zahl $k \in \mathbb{N}$ Unterräume $U_1, U_2, ..., U_k$ von $\mathbb{Q}[x]$ so, dass für $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$, $i \neq j$ gilt:

$$U_i \cap U_j = \{0\} \text{ und } U_1 + U_2 + ... + U_k = \mathbb{Q}[x]$$

Kann mehr als einer dieser Unterräume unendliche Dimension haben? (ohne Begründung)
Können alle diese Unterräume endliche Dimension haben? (ohne Begründung)

ii. Finde unendlich viele Unterräume von $\mathbb{R}[x]$, deren Dimension unendlich ist.