

## Grundlagen

### Vollständige Induktion

1. Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

2. Für welche natürlichen Zahlen  $n$  gilt die Ungleichung  $2n^2 > 4n + 1$ , für welche gilt sie nicht?
3. Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $m^3 - m$  ist ohne Rest durch 3 teilbar.
4. Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Zeige, dass dann der Durchschnitt von  $n$  Untergruppen von  $G$  ebenfalls eine Untergruppe von  $G$  ist.

### Relationen

5. Was ist eine Äquivalenzrelation, was ist eine Ordnungsrelation? Nenne alle Eigenschaften!
6. Sei  $A := \{a, b, c, d, e\}$  eine Menge. Wie viele unterschiedliche Relationen existieren auf  $A$ ? Gib eine Relation auf  $A$  explizit an, die
  - i) reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.
  - ii) weder symmetrisch, noch antisymmetrisch ist.
  - iii) transitiv und reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.
7. Sei eine Relation  $\sim$  gegeben auf  $\mathbb{Z}$  wie folgt:

Für alle  $x, y \in \mathbb{Z}$  gelte  $x \sim y$  genau dann, wenn  $x - y$  gerade ist.

Zeige, dass durch  $\sim$  eine Äquivalenzrelation definiert wird.  
Beschreibe die Äquivalenzklasse  $[0]$ .

8. Seien  $(G, \circ)$  eine Gruppe und

$$R := \{(a, b) \in G \times G \mid \text{Es existiert ein } g \in G \text{ mit der Eigenschaft } b = g^{-1} \circ a \circ g\}$$

Zeige, dass  $R$  eine Äquivalenzrelation ist. Schreibe  $[e]$  explizit hin. ( $e$  ist das neutrale Element der Gruppe.)

9. Seien  $M$  eine beliebige Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine Äquivalenzrelation. Seien außerdem  $x, y \in M$  und es gelte  $[x] \neq [y]$ . Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründe.

Es existiert ein  $m \in M$  so, dass  $m \in [x] \cap [y]$ .

## Komplexe Zahlen

10. Stelle folgende komplexe Zahlen in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  dar!

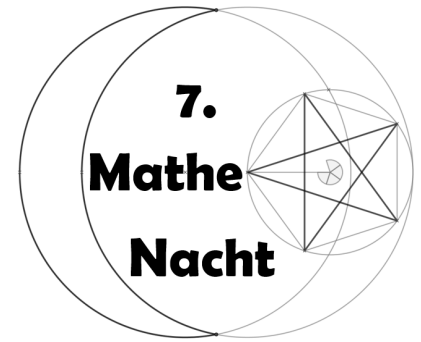
(a)  $\frac{3 - i}{2i + 1}$

(b)  $(1 - i)(3 + 2i)$

(c)  $(-i)^5$

(d)  $\overline{(3 - i)^2}$

11. Bestimme alle komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C}$ , für die gilt:  $z + \bar{z} = 10$ .



## Abbildungen und Homomorphismen

1. Es seien  $f$  und  $g$  Abbildungen von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$  gegeben wie folgt:

Für alle  $a \in \mathbb{Z}$  sei  $f(a) := -a^2$  und  $g(a) := a - 2$ .

- (a) Gilt  $f \circ g = g \circ f$ ? Beweise oder widerlege!
  - (b) Gib die Urbildmenge für die Zahl  $-1$  unter  $f$  an! Gib auch die Urbildmenge für die Zahl  $-1$  unter  $g \circ f$  an!
  - (c) Ist  $g$  bijektiv? Beweise oder widerlege!
  - (d) Ist  $f$  injektiv? Beweise oder widerlege!
2. Gib jeweils eine Abbildung  $f$  an, die
- (a) von  $\mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{Z}$  abbildet und nicht surjektiv ist.
  - (b) von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  abbildet und für die gilt:  $f(n) \leq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (c) von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  abbildet und für die gilt:  $(1, 1)$  liegt im Bild, aber  $(0, 0)$  nicht.
3. Gegeben sei die Gruppe  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mit der komponentenweisen Addition. Weiter seien  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und  $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  Abbildungen gegeben wie folgt:

Für alle  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sei

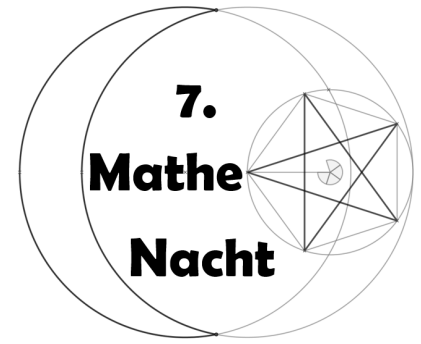
$$\begin{aligned}f(x, y) &= (x, -y) \\g(x, y) &= (y, 2x)\end{aligned}$$

- (a) Prüfe, ob die Elemente  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  im Bild von  $f$  oder  $g$  liegen!
  - (b) Bestimme alle Elemente  $v \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , für die gilt:  $f(v) = g(v)$ .
  - (c) Bestimme  $\text{Bild}(f) \cap \text{Bild}(g)$ !
  - (d) Ist  $g$  ein Gruppen-Homomorphismus von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ? Beweise oder widerlege!
4. Gegeben seien der Vektorraum  $V := \mathbb{R}^2$  und die Abbildung  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow V$  mit:

$$\alpha(z) := (3z, -z) \text{ für alle } z \in \mathbb{R}$$

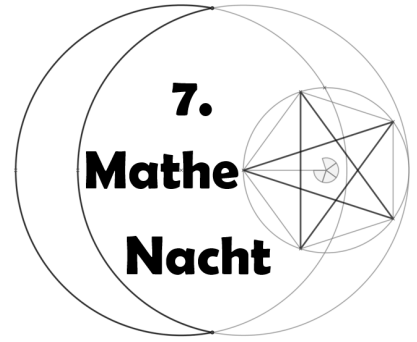
- (a) Zeige, dass  $\alpha$  ein Vektorraumhomomorphismus ist!
- (b) Bestimme  $\text{Kern}(\alpha)$ ! Welche Dimension hat  $\text{Kern}(\alpha)$ ?

5. Es sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Abbildung, wobei für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  gilt:  $f(x, y, z) = (-2x + y, y^2)$ .
- (a) Gib das Bild von  $(1, -3, 2)$  an!
  - (b) Gib die vollständige Urbildmenge von  $(0, 4)$  an und die von  $(0, -1)$ !
  - (c) Ist  $f$  surjektiv? Ist  $f$  injektiv? Ist  $f$  ein Vektorraumhomomorphismus? Beweise oder widerlege!
6. Entscheide, welche der folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen bzw. Vektorraumhomomorphismen, injektiv oder surjektiv sind! Bestimme bei den Vektorraumhomomorphismen jeweils den Kern!
- (a)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mit  $f(z) = (0, -z)$
  - (b)  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mit  $g(z) = (z, z^2)$
  - (c)  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mit  $h(z) = (z, z + 1)$
  - (d)  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $p((z_1, z_2)) = z_1$



## Gruppen

1. Seien  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $x, y, z \in G$ .  
Zeige die folgenden Eigenschaften:
  - i)  $(x^{-1})^{-1} = x$ .
  - ii)  $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ .
  - iii) Aus  $x \circ y = x \circ z$  folgt  $y = z$ .
  - iv) Seien  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $u \in U, g \in G \setminus U$ . Zeige, dass dann auch  $u \circ g \in G \setminus U$  gelten muss.
  
2. Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe oder widerlege deine Behauptung!
  - i) Es existiert ein  $g \in G$  so, dass  $g \circ g = g$  ist.
  - ii) Wenn es Elemente  $g, h \in G$  gibt so, dass  $g \circ h = h \circ g$  gilt, dann ist  $G$  abelsch.
  - iii) Für alle  $g, h \in G$  gelte  $(g \circ h)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$ . Dann ist  $G$  abelsch.
  - iv) Es existiert eine Gruppe  $(F, \cdot)$  so, dass  $F$  zwei neutrale Elemente besitzt.
  
3. Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe mit dem neutralen Element  $e$  und der Eigenschaft:  
Für alle  $g \in G$  gilt  $g \circ g = e$ .  
  
Zeige, dass  $G$  abelsch ist.
  
4. Eine Permutation auf einer Menge ist eine bijektive Abbildung der Menge in sich selbst. Seien  $A$  eine endliche Menge und  $P$  die Menge aller Permutationen auf der Menge  $A$ . Es bezeichne  $*$  die Komposition von Abbildungen.  
  
Zeige, dass  $(P, *)$  eine Gruppe ist.
  
5. Seien  $G := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und  $\oplus$  wie folgt definiert:  
  
Für alle  $(a, b), (c, d) \in G$  sei  $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$  (komponentenweise Addition).
  - i) Zeige, dass  $(G, \oplus)$  eine Gruppe ist.
  - ii) Sei  $U := \{(a, b) \in G \mid a \text{ ist gerade}\}$ . Ist  $(U, \oplus)$  eine Untergruppe von  $(G, \oplus)$ ?
  - iii) Ist  $G \setminus \{(0, 0)\}$  mit komponentenweiser Multiplikation eine Gruppe?



## Vektorräume I (Unterräume)

1. Man untersuche, für welche  $c \in \mathbb{R}$  die Menge

$$U_c := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = c \}$$

ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$  ist.

2. Untersuche, welche der folgenden vier Mengen Untervektorräume von  $\mathbb{R}^2$  sind und beweise oder widerlege deine Behauptung!

(a)  $U_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$

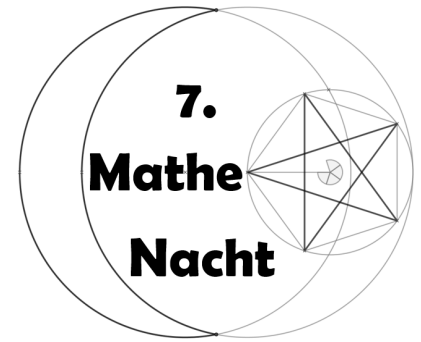
(b)  $U_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \}$

(c)  $U_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \}$

(d)  $U_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \}$

3. Gegeben sei der Vektorraum  $V := \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Zeige, dass  $U := \{ f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \}$  ein Untervektorraum von  $V$  ist.
4. Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  und seien  $U_1$  und  $U_2$  zwei Untervektorräume von  $V$ . Man zeige: Wenn auch die Vereinigung  $U_1 \cup U_2$  ein Untervektorraum von  $V$  ist, dann gilt  $U_1 \subseteq U_2$  oder  $U_2 \subseteq U_1$ .

## Vektorräume II (Basis und Dimension)



1. (a) Zeige, dass die Menge

$$M := \{(1, 1, 1), (0, -1, 2), (-2, 0, 4)\}$$

eine Basis für  $\mathbb{R}^3$  bildet.

- (b) Bestimme alle  $x \in \mathbb{R}$ , für die die Vektoren  $(-2x, -1, x), (8, x, -4)$  linear unabhängig sind!

2. Wir betrachten den Vektorraum  $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ .

- (a) Ist die Menge  $\{x^2, x^4 + x^2\}$  linear unabhängig?

- (b) Gib eine Basis für den Untervektorraum  $U := \{f \in V \mid \text{Grad}(f) \leq 6\}$  an!  
Welche Dimension hat  $U$ ?

3. Es sei  $A := \{(1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1), (2, -1, 0, 3), (5, -2, 0, 7)\}$ .

- (a) Zeige, dass  $(2, -9, 0, 11)$  in  $\text{span}(A)$  liegt! Gib einen Vektor an, der nicht in  $\text{span}(A)$  liegt!

- (b) Gib ein Erzeugendensystem für  $\text{span}(A)$  an!

- (c) Gib eine Basis von  $\text{span}(A)$  an und beweise, dass es sich um eine Basis handelt!

- (d) Welche Dimension hat  $\text{span}(A)$ ?

- (e) Ersetze das Fragezeichen!

$$\text{span}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid ? \}$$

4. Gegeben seien die folgenden Unterräume von  $\mathbb{R}^3$ :

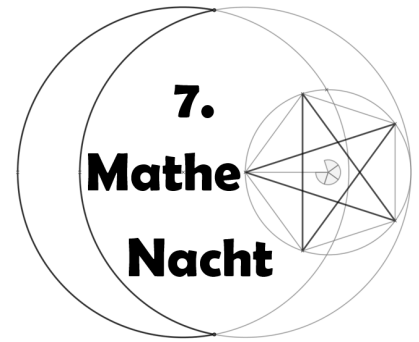
$$U_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \text{ und } U_2 := \{(x, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Gib eine Basis  $B_1$  von  $U_1$  und eine Basis  $B_2$  von  $U_2$  an!

- (b) Gib eine Basis  $C$  von  $\mathbb{R}^3$  an, die  $B_1$  enthält!

- (c) Gib eine Basis von  $U_1 \cap U_2$  an!

- (d) Bestimme  $U_1 + U_2$ !



## Definitionen und Beweise

### 1. Abbildungen

- (a) Definiere drei der folgenden Begriffe!

Bild, Urbild, injektiv, surjektiv

- (b) Gegeben sei die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(x) = x^2$ . Gib für  $X$  und  $Y$  Mengen an so, dass

- $f$  injektiv, aber nicht surjektiv ist
- $f$  surjektiv, aber nicht injektiv ist
- $f$  bijektiv ist
- $f \equiv id_X$

### 2. Gruppen

- (a) Definiere drei der folgenden Begriffe/Begriffspaare!

Halbgruppe & Gruppe, Untergruppe, Gruppen-Homomorphismus, Kern & Bild

- (b) Seien  $(G, *)$  und  $(H, \bullet)$  Gruppen mit den neutralen Elementen  $e_G$  und  $e_H$  und  $\varphi : (G, *) \rightarrow (H, \bullet)$ ,  $\alpha : (H, \bullet) \rightarrow (G, *)$  Gruppen-Homomorphismen. Beweise:

- $\forall g \in G \forall a \in \text{Kern}(\varphi) : g^{-1} * a * g \in \text{Kern}(\varphi)$
- Die Komposition  $\alpha \circ \varphi : G \rightarrow G$  ist ein Gruppenhomomorphismus.
- Es gilt  $\varphi(e_G) = e_H$ ,  $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} \forall g \in G$

### 3. Ringe, Körper, Vektorräume

- (a) Definiere folgende Begriffe! (Die Begriffe „Halbgruppe“ und abelsche Gruppe dürfen dabei ohne Definition verwendet werden.)

Ring, Körper, Vektorraum, Unterraum, Körperhomomorphismus

- (b) Definiere jeden Begriff unter Verwendung des vorherigen:

Linearkombination, Erzeugendensystem, Basis, Dimension



(c) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe jeweils deine Antwort!

- i. Je  $n$  paarweise verschiedene Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ .
- ii. Es gibt zwei verschiedene Vektorräume über dem selben Körper mit der gleichen Basis.
- iii. Es gibt keine Basis, die die Null des Vektorraumes enthält.
- iv. Der Nullraum hat keine Basis und ist der einzige Vektorraum ohne Basis.
- v. Jeder Vektorraum hat unendlich viele verschiedene Basen.
- vi. Jeder Körper ist ein Ring.
- vii. Jeder Ring ist ein Körper.
- viii. Alle Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.

(d) Sei  $V$  ein endlich erzeugter Vektorraum über dem Körper  $K$ . Weiter seien  $U$  und  $W$  Unterräume von  $V$  und es sei  $A := \{a_1, \dots, a_n\} \subset V$ . Zeige:

- i. Falls  $A \setminus \{a_n\}$  linear abhängig ist, so auch  $A$ . Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?
- ii. Falls  $A$  linear unabhängig ist, so auch  $A \setminus \{a_n\}$ . Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

(e) Wir betrachten die Vektorräume  $\mathbb{R}[x]$  und  $\mathbb{Q}[x]$  der reellen bzw. rationalen Polynome.

- i. Finde für eine beliebige Zahl  $k \in \mathbb{N}$  Unterräume  $U_1, U_2, \dots, U_k$  von  $\mathbb{Q}[x]$  so, dass für  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, i \neq j$  gilt:

$$U_i \cap U_j = \{0\} \text{ und } U_1 + U_2 + \dots + U_k = \mathbb{Q}[x]$$

Kann mehr als einer dieser Unterräume unendliche Dimension haben?  
(ohne Begründung)  
Können alle diese Unterräume endliche Dimension haben? (ohne Begründung)

- ii. Finde unendlich viele Unterräume von  $\mathbb{R}[x]$ , deren Dimension unendlich ist.